Résolution d'une équation différentielle

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

f est la fonction définie pour tout réel x par : $f(x)=\dfrac{x\text{ch}x-\text{sh}x}{\text{ch}x-1}$ pour $x\neq 0$ et $f(0)=L$.

$(\mathcal{C})$ désigne la courbe représentative de f.

1. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.
   En déduire L pour que f soit continue en 0 ; désormais on prendra L égal à la valeur trouvée.
   Démontrer que f est dérivable en 0 ; préciser la position de la courbe par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.
2. Etudier les variations de f sur $[0,+\infty[$.
   Donner le tableau de variations de f.
3. Etudier les asymptotes éventuelles de $(\mathcal{C})$ et préciser la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à ces asymptotes.
   Tracer $(\mathcal{C})$.
4. On considère l'équation différentielle (E) : $(\text{ch}\,x-1)y'+y\,\text{sh}\,x=x\,\text{sh}\,x$.
   a) Résoudre (E) sur chacun des intervalles : $I_1=]-\infty,0[$; $I_2=]0,+\infty[$.
   b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.